N.B. : Pour les questions 5°), 6°) et 7°), on notera F la matrice d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dans la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ avec $F = (f_{ij})_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$

5°) Soit E_1 l'ensemble des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que : $f(\pi) \subset \pi$

a) Montrer que E_1 est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

b) Montrer que : $$f \in E_1 \iff \exists \ell_1 \in \mathbb{R} \ / \ \forall j \in \{1,2,3\} \quad \sum_{i=1}^{3} f_{ij} = \ell_1$$

6°) Soit E_2 l'ensemble des endomorphismes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que : $f(\delta) \subset \delta$

a) Montrer que E_2 est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

b) Montrer que : $$f \in E_2 \iff \exists \ell_2 \in \mathbb{R} \ / \ \forall i \in \{1,2,3\} \quad \sum_{j=1}^{3} f_{ij} = \ell_2$$

7°) On pose $E = E_1 \cap E_2$ et soit $f \in E$.

Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $$\begin{cases} \forall\, i \in \{1,2,3\} & \sum_{j=1}^{3} f_{ij} = \ell \\ \forall\, j \in \{1,2,3\} & \sum_{i=1}^{3} f_{ij} = \ell \end{cases}$$

8°) Montrer que l'ensemble des automorphismes $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ tels que $f(\Gamma) \subset \Gamma$ est inclus dans E.

9°) En considérant une base de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs de π et de δ dans cet ordre, montrer que : $f \in GL(\mathbb{R}^3)$ et $f(\Gamma) \subset \Gamma$ si et seulement si la matrice qui représente f dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où A est une matrice inversible $\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

II On considère cette fois l'application Φ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Phi \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \\ V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \longmapsto & \Phi(V) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On définit la matrice $\Omega \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ par :

$$\Omega = (\Omega_{pq})_{(p,q)\in\{1,2,3,4\}^2} \quad \text{avec} \quad \Omega_{pq} = i^{(p-1)(q-1)} \quad \text{où} \quad i = e^{i\pi/2}$$

1°) Soit $M = \Phi(V)$. Calculer $\Omega M \overline{\Omega}$.

2°) Calculer $\det(\Omega M \overline{\Omega})$.

3°) Soit $\Delta = \{ V \in \mathbb{R}^4 \ / \ \Phi(V) \text{ non inversible} \}$.

Montrer que Δ est l'union de deux hyperplans $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et d'un autre sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension 2.

4°) Déterminer $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{E}$.

5°) Déterminer les matrices représentant dans la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) de $\mathbb{R}^4$ les endomorphismes $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ pour lesquels :

a) $f(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$

b) $f(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$

c) $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$

III On considère dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ l'ensemble $\mathcal{U}$ des points M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que :

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy) = 1$$

1°) Soit P_a le plan d'équation

$$x + y + z = a$$

où a est un réel fixé non nul.

a) Déterminer l'équation de $P_a \cap \mathcal{U}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de a, la nature de $P_a \cap \mathcal{U}$.

c) Représenter graphiquement la projection de $P_1 \cap \mathcal{U}$ sur le plan Oxy (unité : 6 cm).

2°) Soit P le plan d'équation

$$z = 0$$

a) Déterminer l'équation de $P \cap \mathcal{U}$.

b) Représenter graphiquement $P \cap \mathcal{U}$.

---=oOOo=---

ECOLES MILITAIRES:ECOLE de l'AIR
Option TA-Math.option.1
page 185
1987